Université Paris 7 - Denis Diderot

MM2 : Examen du 25 juin 2013

L'épreuve dure trois heures. *Les exercices sont indépendants.* Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument précis et juste. Le barème est donné *à titre indicatif.* Les documents, calculettes et téléphones sont interdits.

Exercice I. (5 points)

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pas nécessairement de dimension finie.

Soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}$ (on dit que s est une *symétrie*).

1. On définit $p := \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$, montrer que $p \circ p = p$ (on dit que p est une *projection*).
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
3. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$, vérifier que $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie s dans la base canonique.
   Calculer $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$.
   Écrire la matrice de s dans une base adaptée à la somme $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$.

Exercice II. (3 points)

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $(x|y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que $x \neq 0$ si et seulement si $(x|x) \neq 0$.
2. Soient $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $(v_i|v_j) = 0$ pour $i \neq j$.
   Calculer $(v|v_i)$ pour $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m)$ de la forme $v = \sum_{k=1}^{m} a_k v_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$.
3. Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $(v_i|v_j) = 0$ pour $i \neq j$.
   Démontrer que $\mathscr{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   Indication : utiliser la question précédente.

Exercice III. (2 points)

Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x$.

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Exercice IV. (3 points)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est paire si et seulement si :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice V. (2 points)

On note : $F(x) = \dfrac{4x+1}{x^3 - x^2 + x - 6}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x^2 + x - 6 \neq 0$.
Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice VI. (3 points)

Déterminer toutes les solutions définies sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y'(x) = \frac{y}{\sqrt{x}} + 1$$
qui ont pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice VII. (3 points)

On note :
$$M : t \longmapsto \big(x(t) = t^3 \ln(1 + \tfrac{1}{1+t^2}), y(t) = t^2 \sin(\tfrac{t}{1+t^2}))\big).$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la courbe M au point de paramètre $t = 0$: s'agit-il d'un point ordinaire ? d'un point d'inflexion ? d'un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce ? d'un point de rebroussement de $2^{\text{ème}}$ espèce ?
   Préciser la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en $t = 0$ (schéma).
2. Démontrer que M a une asymptote – que l'on précisera – pour la borne $+\infty$.
   Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
